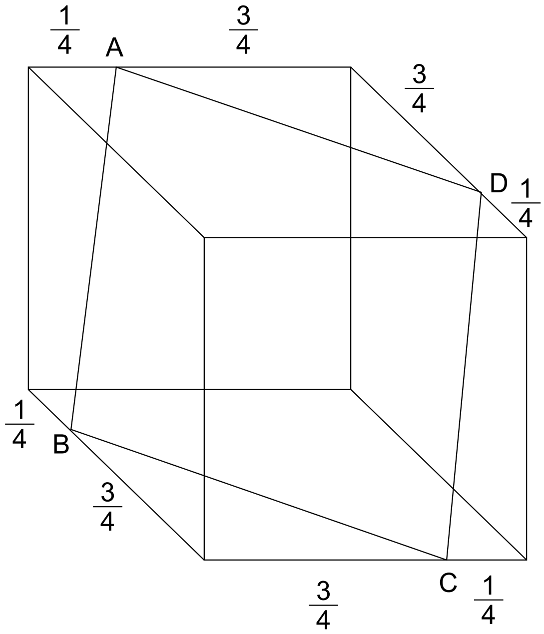
Uma solução do problema 3 da OBM, Nível 3

Problema 3, OBM 2005, Nível 3. *Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.*

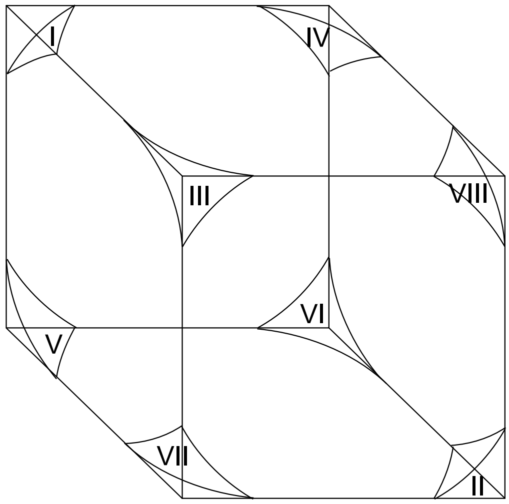
Solução.

Primeiro, mostremos que podemos supor, sem perda de generalidade, que os centros do cubo, que doravante chamaremos $\mathcal{C}$ e do quadrado coincidem. Suponha que os centros não coincidam. Considere os três planos distintos, cada um deles paralelo a duas faces do cubo, que passam pelo centro do quadrado. Os três planos determinam no cubo oito paralelepípedos; considere o de menores dimensões (ou seja, algum que tem todas as dimensões menores ou iguais a $1/2$). Seja a a maior dimensão desse cubo. Então construa um cubo $\mathcal{C}_0$ de lado $2a$ com centro no centro do quadrado e faces paralelas às faces do cubo do problema. Não é difícil ver que o quadrado está contido nesse cubo, dado que cada plano ou contém o quadrado ou o corta em dois polígonos congruentes e simétricos em relação ao centro do quadrado. Translade o cubo $\mathcal{C}$, incluindo o quadrado, que está em seu interior, de modo que o centro de $\mathcal{C}_0$ coincida com o centro do cubo. Agora os centros do quadrado e de $\mathcal{C}$ coincidem, e dado que $2a \le 1$, $\mathcal{C}_0$ está contido em $\mathcal{C}$, o quadrado ainda está contido no cubo $\mathcal{C}$.

A figura a seguir mostra que $\ell \ge \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Note que $AB = CD = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $AD = BC = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$ e $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}$.

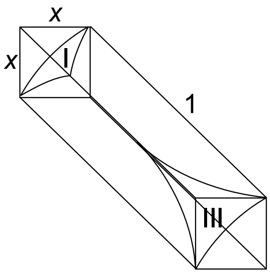


Vamos provar que, na verdade, $\ell = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Suponha que exista um quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Podemos supor que o centro do quadrado coincide com o centro do cubo. Seja $\mathcal{S}$ uma esfera com centro no centro O de $\mathcal{C}$ e que passa pelo quatro vértices do quadrado, ou seja, de raio $\ell\sqrt{2}/2 > 3/4$. A figura a seguir mostra as secções de $\mathcal{S}$ no cubo $\mathcal{C}$. Numeramos as oito regiões contidas na superfície da esfera e no interior do cubo com números romanos.

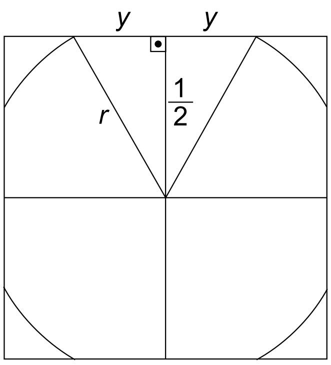


Agora, vamos tentar localizar o quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$ em $\mathcal{S}$. Note que cada um dos quatro vértices deve pertencer a uma das regiões de I a VIII. Suponhamos, sem perda de generalidade, que dois vértices opostos do quadrado estão contidos nas regiões I e, conseqüentemente, II, já que vértices opostos do quadrado são diametralmente opostos em $\mathcal{S}$.

Considere o paralelepípedo de menores dimensões que contém as regiões I e, digamos, III. Sejam x, x e 1 as suas dimensões. Vamos provar que dois pontos no interior desse paralelepípedo está a uma distância menor que $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Primeiro, considere uma face do cubo e sua interseção com a esfera. A partir da figura a seguir, podemos concluir que o raio da esfera é $\sqrt{y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{1}{2}}$. Como o raio da esfera é maior que $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$, $y^2 + \frac{1}{2} > \left(\frac{3}{4}\right)^2 \iff y > \frac{1}{4}$. Conseqüentemente, $x = \frac{1}{2} - y < \frac{1}{4}$.



A diagonal do paralelepípedo mede $\sqrt{x^2 + x^2 + 1^2} < \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + 1} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ e portanto, dois vértices do quadrado não podem estar contidos em I e III. Como um dos vértices pertence a I, não pode existir vértice do quadrado em III e, analogamente, em II e V. Da mesma forma, lembrando que um dos vértices do quadrado está em II, não pode haver vértices do quadrado em VI, VII e VIII. Mas então não sobraram regiões para os outros dois vértices do quadrado, absurdo.

Deste modo, o maior lado de um quadrado contido no cubo unitário é $\ell = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.